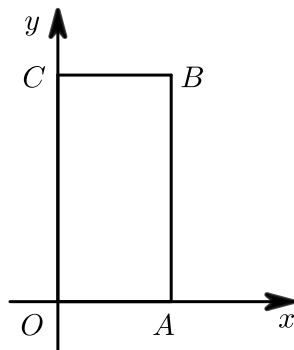


第4讲 一次函数与动点、四边形综合

一、一次函数与动点综合

例题1

1. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，长方形 $OABC$ 的顶点 A 、 C 的坐标分别为 $(3, 0)$ ， $(0, 5)$ 。



- (1) 直接写出点 B 的坐标。
- (2) 若过点 C 的直线 CD 交 AB 边于点 D ，且把长方形 $OABC$ 的周长分为 $1:3$ 两部分，求直线 CD 的解析式。
- (3) 设点 P 沿 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 的方向运动到点 C （但不与点 O 、 C 重合），求 $\triangle OPC$ 的面积 y 与点 P 所行路程 x 之间的函数关系式及自变量 x 的取值范围。

【答案】 (1) $(3, 5)$ 。

(2) $y = -\frac{1}{3}x + 5$ 。

- (3) ①当点 P 在 OA 上运动时， $y = \frac{5}{2}x$ ($0 < x < 3$)，
②当点 P 在 AB 上运动时， $y = \frac{15}{2}$ ($3 \leq x \leq 8$)，
③当点 P 在 BC 上运动时， $y = -\frac{5}{2}x + \frac{55}{2}$ ($8 < x < 11$)。

【解析】 (1) $\because$ 长方形 $OABC$ 的顶点 A 、 C 的坐标分别为 $(3, 0)$ ， $(0, 5)$

$$\therefore BC = 3, AB = 5,$$

$$\therefore \text{点} B \text{的坐标为} (3, 5)。$$

(2) 如图1，

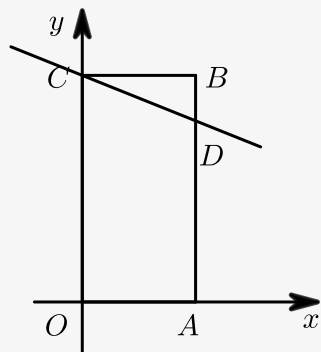


图 1

$\therefore$ 长方形 $OABC$ 中, $A(3,0)$, $B(3,5)$, $C(0,5)$,
 $\therefore OA = 3$, $AB = 5$, $BC = 3$, $OC = 5$,
 $\therefore$ 长方形 $OABC$ 的周长为 16,
 $\therefore$ 直线 CD 分长方形 $OABC$ 的周长分为 1 : 3 两部分,
 $\therefore CB + BD = 4$, $CO + OA + AD = 12$,
 $\therefore AD = 4$,
 $\therefore D(3,4)$,
 设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$,
 $\therefore \begin{cases} 5 = b \\ 4 = 3k + b \end{cases}$
 $\therefore k = -\frac{1}{3}$, $b = 5$,
 $\therefore$ 直线 CD 的解析式为: $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

(3) ① 当点 P 在 OA 上运动时, $P(x,0)$.

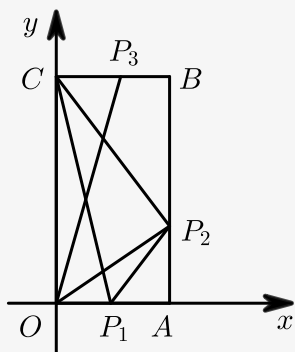


图 2

$\therefore S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} OC \cdot OP = \frac{5}{2}x$,
 $\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y = \frac{5}{2}x$ ($0 < x < 3$),
 ② 当点 P 在 AB 上运动时, $P(3, x-3)$,
 $\therefore S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} OC \cdot |x_p| = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2}$,
 $\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y = \frac{15}{2}$ ($3 \leq x \leq 8$),
 ③ 当点 P 在 BC 上运动时, $P(11-x, 5)$,

$$\therefore PC = |11 - x| = 11 - x.$$

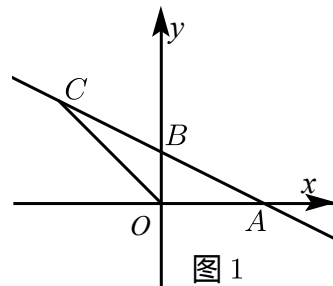
$$\therefore S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} OC \cdot PC = \frac{5}{2} (11 - x) = -\frac{5}{2} x + \frac{55}{2} (8 < x < 11),$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = -\frac{5}{2} x + \frac{55}{2} (8 < x < 11).$$

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

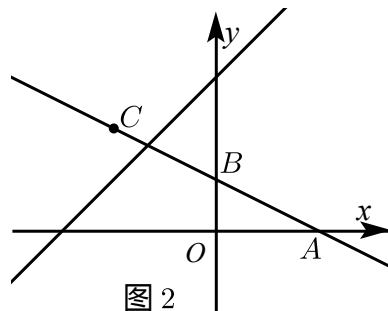
练习1

2. 已知直线 AB 分别交 x 、 y 轴于 $A(4, 0)$ 、 B 两点， $C(-4, a)$ 为直线 $y = -x$ 与直线 AB 的公共点。

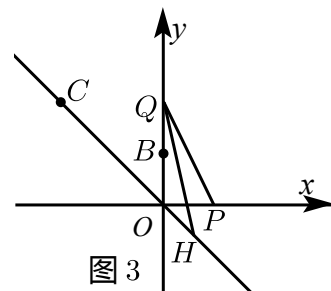


(1) 求点 B 的坐标。

(2) 已知动点 M 在直线 $y = x + 6$ 上，是否存在点 M ，使得 $S_{\triangle OMB} = S_{\triangle OMA}$ ？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由。



(3) 已知点 P 、 Q 分别是 x 轴、 y 轴正半轴上的动点， Q 在点 B 上方，且 $OP = BQ$ ， QH 是 $\angle OQP$ 的角平分线，交直线 CO 于 H ，直接写出 OB 、 PQ 、 OH 之间的数量关系。



【答案】(1) $B(0, 2)$ 。

(2) $(-12, -6)$ 或 $(-4, 2)$ 。

(3) $PQ - \sqrt{2}OH = OB$ 。

【解析】(1) C 在 AB 上, 故 $C(-4, 4)$,

设 AB 解析式: $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\begin{cases} 0 = 4k + b \\ 4 = -4k + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

故 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

令 $x = 0, y = 2$, 故 $B(0, 2)$.

(2) 存在.

$$S_{\triangle OMA} = \frac{1}{2}OA \cdot |y_M| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |m + 6| = 2|m + 6|,$$

$$S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2}OB \cdot |x_M| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |m| = |m|,$$

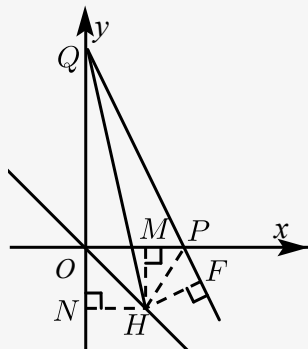
$$\therefore 2|m + 6| = |m|,$$

解得: $m = -12$, 或 -4 ,

故 $M(-12, -6)$ 或 $(-4, 2)$.

(3) $PQ - \sqrt{2}OH = OB$.

作 $HN \perp y$ 轴, $HM \perp x$ 轴, $HF \perp PQ$,



由题意可知: $HN = HM = HF$,

连接 PH , 可得 $PF = PM$,

同理可得: $QF = QN$,

$$\therefore PQ + PF = QB + OB + ON,$$

$$\therefore PQ + PM = OP + OB + OM,$$

$$\text{即 } PQ + (OP - OM) = OP + OB + OM,$$

$$\therefore PQ - 2OM = OB,$$

$$\therefore PQ - \sqrt{2}OH = OB.$$

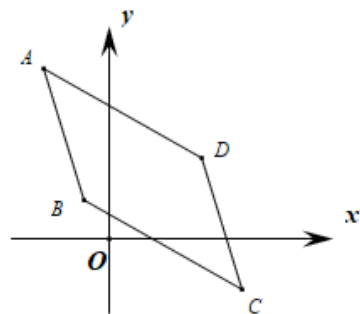
【标注】【知识点】一次函数与动点问题

二、一次函数与四边形存在性

▮ 与平行四边形存在性综合

平行四边形顶点坐标模型：

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，
有_____



【教法备注】

平行四边形顶点坐标模型：
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

①通过平移推导

AD 平移得到 BC ，由平移坐标公式，可得 $x_B - x_A = x_C - x_D$ ， $y_B - y_A = y_C - y_D$ ；

或者 AB 平移得到 DC ，由平移坐标公式可得 $x_D - x_A = x_C - x_B$ ， $y_D - y_A = y_C - y_B$ 。

②通过中点坐标公式推导

连接 AC 、 BD 交于点 M ，则 AC 与 BD 互相平分，即 AC 的中点也是 BD 的中点；

从 AC 的角度，由中点坐标公式，可得

$$M \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right);$$

从 BD 的角度，由中点坐标公式，可得

$$M \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right).$$

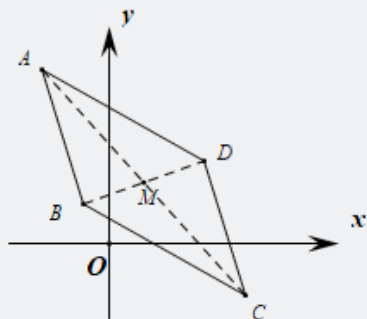
总结：

所有的平行四边形存在性问题，基本都可以利用上述模型求解，更重要的是实现盲解盲算，具体步骤如下：

第一步：写出或设出三个顶点的坐标；

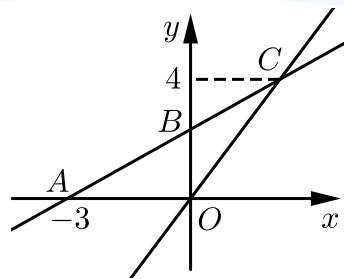
第二步：以“哪两个顶点相对”（即对角线）为分类标准，分三类讨论，利用上述模型，求出第四个顶点的坐标；

第三步：将第四个顶点坐标代入相应的函数关系式即可。



▮ 例题2

3. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， O 是坐标原点，一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，且与正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图象的交点为 $C(m, 4)$ 。



(1) 求一次函数 $y = kx + b$ 的解析式.

(2) D 是平面内一点, 以 O 、 C 、 D 、 B 四点为顶点的四边形是平行四边形, 直接写出点 D 的坐标. (不必写出推理过程).

【答案】 (1) $y = \frac{2}{3}x + 2$.

(2) $(-3, -2)$, $(3, 6)$, $(3, 2)$.

【解析】 (1) $\because$ 点 $C(m, 4)$ 在直线 $y = \frac{4}{3}x$ 上,

$$\therefore 4 = \frac{4}{3}m, \text{ 解得 } m = 3.$$

$\because$ 点 $A(3, 0)$ 与 $C(3, 4)$ 在直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 上,

$$\therefore \begin{cases} 0 = -3k + b \\ 4 = 3k + b \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = \frac{2}{3}x + 2$.

(2) $\because O$ 、 C 、 D 、 B 四点为顶点的四边形是平行四边形,

$\therefore$ 只要 CO 平行且等于 BD , 即 $BD = 5$,

① 当点 D 在点 O 的左边时, 点 D 的坐标为 $(-3, -2)$,

② 当点 D 在点 O 的右边时, 点 D 的坐标为 $(3, 2)$,

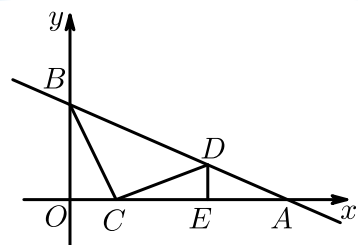
③ 当 $BO \parallel DC$ 时, $D(3, 6)$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-3, -2)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(3, 6)$.

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

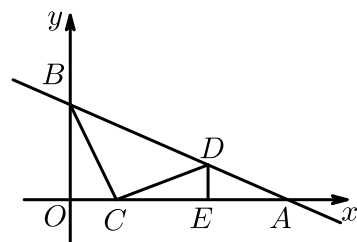
练习2

4. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = kx + b$ 与 x 轴、 y 轴相交于 $A(6, 0)$, $B(0, 3)$ 两点, 动点 C 在线段 OA 上. 将线段 CB 绕着点 C 顺时针旋转 90° 得到 CD , 此时点 D 恰好落在直线 AB 上, 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E .



(1) 求直线 $y = kx + b$ 的表达式及点 D 的坐标.

(2) 若点 P 在 y 轴上, 点 Q 在直线 AB 上, 是否存在以 C 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 直接写出所有满足条件的 Q 点坐标, 若不存在, 请说明理由.



备用图

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $D(4, 1)$.

(2) 存在, $\left(3, \frac{3}{2}\right)$, $\left(5, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-3, \frac{9}{2}\right)$.

【解析】 (1) 将 $A(6, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 代入直线 $y = kx + b$ 得,

$$\begin{cases} 6k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$$\because \angle BOC = \angle BCD = \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB + \angle DCE = 90^\circ, \angle DCE + \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCO = \angle CDE,$$

$$\therefore BC = CD,$$

$$\therefore \triangle BOC \cong \triangle CED,$$

$$\therefore OC = DE, BO = CE = 3,$$

$$\text{设 } OC = DE = m,$$

$$\therefore D(m + 3, m)$$

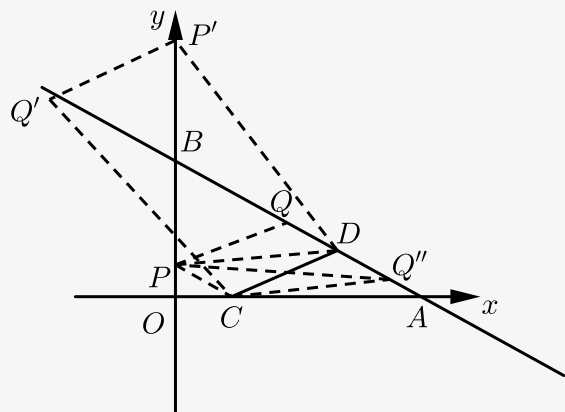
$$\text{把 } D(m + 3, m) \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ 得,}$$

$$m = -\frac{1}{2}(m + 3) + 3,$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore D(4, 1).$$

(2) 如图,



①作 $CP \parallel AB$ 交 y 轴于 P , 作 $PQ \parallel CD$ 交 AB 于 Q ,

则四边形 $PCDQ$ 是平行四边形,

设 $y = -\frac{1}{2}x + b$, 将 $C(1, 0)$ 代入得, $b = \frac{1}{2}$,

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

$$\therefore P\left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$\therefore$ 点 C 向右平移3个单位, 再向上平移1个单位得到 D ,

$\therefore$ 点 P 向右平移3个单位, 再向上平移1个单位得到 Q ,

$$\therefore Q\left(3, \frac{3}{2}\right),$$

②作 $P'Q' \parallel CD$ 交 y 轴于 P' , 交 AB 于 Q' , 则四边形 $Q'CDP'$ 是平行四边形,

$$\therefore PQ \parallel CD, P'Q' \parallel CD,$$

$$\therefore PQ \parallel P'Q',$$

$\therefore P'Q'PQ$ 是平行四边形,

$\therefore Q', Q$ 关于点 B 对称,

$$\therefore Q'\left(-3, \frac{9}{2}\right).$$

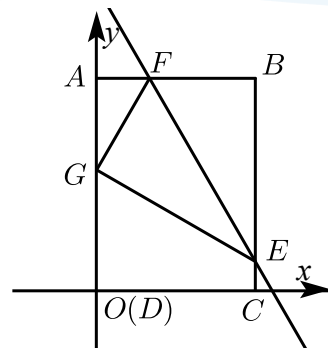
③当 CD 为对角线时, 四边形 $DPCQ''$ 为平行四边形,

同①, 由平移可得 $Q''\left(5, \frac{1}{2}\right)$,

$$\therefore Q \text{ 的坐标为 } \left(3, \frac{3}{2}\right), \left(5, \frac{1}{2}\right) \text{ 或 } \left(-3, \frac{9}{2}\right).$$

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

5. 如图, 四边形 $ABCD$ 为矩形, C 点在 x 轴上, A 点在 y 轴上, $D(0, 0)$, $B(3, 4)$, 矩形 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠, 点 B 落在 AD 边上的 G 处, E, F 分别在 BC, AB 边上且 $F(1, 4)$.



- (1) 求 G 点坐标 .
- (2) 求直线 EF 解析式 .
- (3) 点 N 在坐标轴上, 直线 EF 上是否存在点 M , 使以 M, N, F, G 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 求出 M 点坐标; 若不存在, 说明理由 .

【答案】 (1) $G(0, 4 - \sqrt{3})$.

(2) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 4$.

(3) $M_1\left(2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}, 8 - \sqrt{3}\right)$ 、 $M_2\left(2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$ 、 $M_3\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ 或 $M_4(-1, 4 + 2\sqrt{3})$.

【解析】 (1) 由题意得: $AB = 3$, $AF = 1$,

则 $FB = AB - AF = 2 = GF$,

则 $AG = \sqrt{GF^2 - AF^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore G(0, 4 - \sqrt{3})$.

(2) 由对称性: $EF \perp BG$, 则 $K_{EF} \times K_{GB} = -1$,

又 $K_{BG} = \frac{4 - (4 - \sqrt{3})}{3 - 0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore K_{EF} = -\sqrt{3}$,

又 $F(1, 4)$,

则直线 EF 解析式: $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 4$.

(3) 设 $M(m, -\sqrt{3}m + \sqrt{3} + 4)$, $G(0, 4 - \sqrt{3})$, $F(1, 4)$,

①当 N 在 x 轴上时, 设 $N(n, 0)$,

当 FG 为对角线时, 则 $\begin{cases} 1 + 0 = m + n \\ 4 + 4 - \sqrt{3} = -\sqrt{3}m + \sqrt{3} + 4 + 0 \end{cases}$

则 $\begin{cases} m = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ n = \frac{4}{3}\sqrt{3} - 1 \end{cases}$,

$\therefore M\left(2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}, 8 - \sqrt{3}\right)$,

当 FM 为对角线时, 则 $\begin{cases} 1+m=0+n \\ 4-\sqrt{3}+0=-\sqrt{3}m+\sqrt{3}+4 \end{cases}'$

$$\text{则} \begin{cases} m=2+\frac{4}{3}\sqrt{3} \\ n=3+\frac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases}'$$

$$\therefore M\left(2+\frac{4}{3}\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$$

当 FN 为对角线时, 则 $\begin{cases} 1+n=0+m \\ 4+0=-\sqrt{3}m+\sqrt{3}+4+4 \end{cases}'$

$$\text{则} \begin{cases} m=\frac{4}{3}\sqrt{3} \\ n=\frac{4}{3}\sqrt{3}-1 \end{cases}'$$

$$\therefore M\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$$

②当 N 在 y 轴上时, 设 $N(0, n)$,

当 FG 为对角线时, 则 $\begin{cases} 1+0=m+0 \\ 4+4-\sqrt{3}=-\sqrt{3}m+\sqrt{3}+4+n \end{cases}'$

$$\text{则} \begin{cases} m=1 \\ n=4-\sqrt{3} \end{cases}'$$

$$\therefore M(1, 4) \text{ (舍去) } .$$

当 FM 为对角线时, 则 $\begin{cases} 1+m=0+0 \\ 4-\sqrt{3}+m=-\sqrt{3}m+\sqrt{3}+4+4 \end{cases}'$

$$\text{则} \begin{cases} m=-1 \\ n=4+3\sqrt{3} \end{cases}'$$

$$\therefore M(-1, 4+2\sqrt{3}) ,$$

当 FN 为对角线时, 则 $\begin{cases} 1+0=0+m \\ 4+n=-\sqrt{3}m+\sqrt{3}+4+4-\sqrt{3} \end{cases}'$

$$\text{则} \begin{cases} m=1 \\ n=4-\sqrt{3} \end{cases}'$$

$$\therefore M(1, 4) \text{ (舍去) } .$$

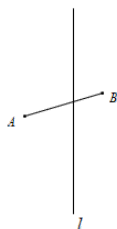
综上所述: $M_1\left(2-\frac{4}{3}\sqrt{3}, 8-\sqrt{3}\right)$ 、 $M_2\left(2+\frac{4}{3}\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$ 、

$M_3\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ 或 $M_4(-1, 4+2\sqrt{3})$.

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

|| 与菱形存在性综合

有一组 _____ 相等的 _____ 是菱形. 因此, 菱形存在性问题可转为 _____ 存在性加 _____ 存在性问题. 如图, 点 C 是直线 l 上一点, 在平面内找一点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为菱形.



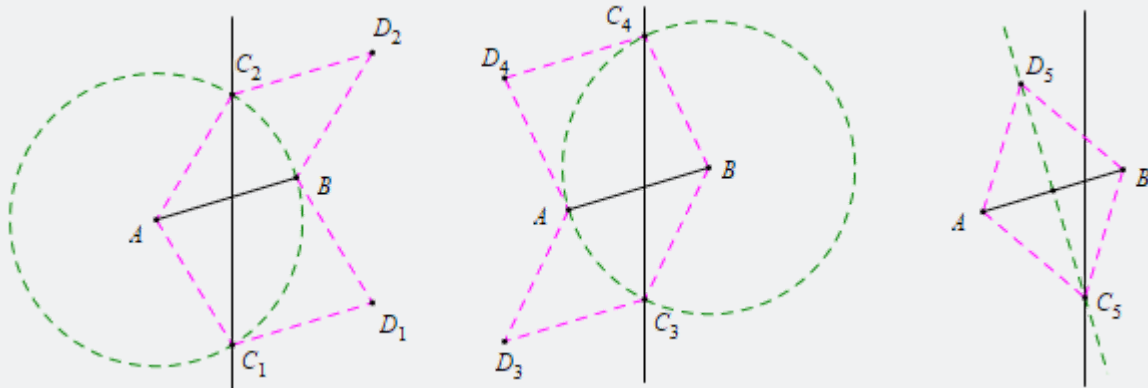
第一步，由“两圆一线”，先在直线 l 找到点 C 使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，这样，就相当于找到了菱形的一半，满足情况的点 C 有 _____ 个；

第二步，由“平移法”或“中点法”找到点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是菱形。

在具体的求解过程中，点 C 坐标可以由等腰三角形存在性问题的“代数法”求得；点 D 坐标继而可以由平行四边形存在性问题的“平移坐标公式法”或“中点坐标公式法”求得。

【教法备注】

有一组邻边相等的平行四边形是菱形。因此，菱形存在性问题可转化为等腰三角形存在性加平行四边形存在性问题。



第一步，由“两圆一线”，先在直线 l 找到点 C 使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，这样，就相当于找到了菱形的一半，满足情况的点 C 有5个；

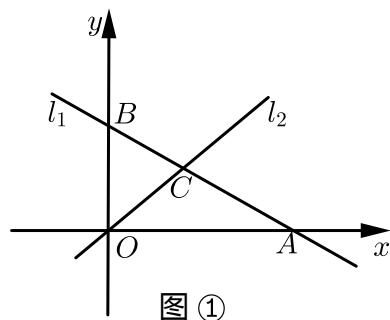
第二步，由“平移法”或“中点法”找到点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是菱形。

在具体的求解过程中，点 C 坐标可以由等腰三角形存在性问题的“代数法”求得；点 D 坐标继而可以由平行四边形存在性问题的“平移坐标公式法”或“中点坐标公式法”求得。

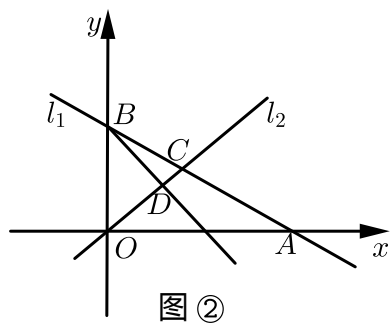
|| 例题3

6. 在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x + 4$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、点 B ，且与直线 $l_2: y = x$ 于点 C 。

(1) 如图①，求出 B 、 C 两点的坐标。



- (2) 若 D 是线段 OC 上的点, 且 $\triangle BOD$ 的面积为 4, 求直线 BD 的函数解析式.
- (3) 如图②, 在 (2) 的条件下, 设 P 是射线 BD 上的点, 在平面内是否存在点 Q , 使以 O 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 (1) $B(0, 4)$, $C\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

(2) $y = -x + 4$.

(3) 存在, 满足条件的 Q 的坐标为 $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 或 $(-2, 2)$ 或 $(4, 4)$.

【解析】 (1) 对于直线: $y = -\frac{1}{2}x + 4$, 令 $x = 0$, 得到 $y = 4$,

$\therefore B(0, 4)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases},$$

$\therefore C\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

(2) $\because$ 点 D 在直线 $y = x$ 上, 设 $D(m, m)$,

$\because \triangle BOD$ 的面积为 4,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times m = 4,$$

解得 $m = 2$,

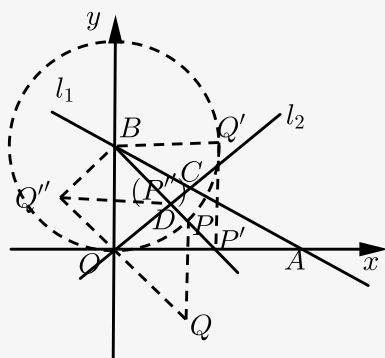
$\therefore D(2, 2)$.

设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$, 则有 $\begin{cases} b = 4 \\ 2k + b = 2 \end{cases}$,

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

∴直线 BD 的解析式为 $y = -x + 4$.

(3) 如图中,



①当 OB 为菱形的边时, $OB = PB = 4$, 可得 $P(2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$, $Q(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

②当 $P'B$ 为菱形的对角线时, 四边形 $OBQ'P'$ 是正方形, 此时 $Q(4, 4)$.

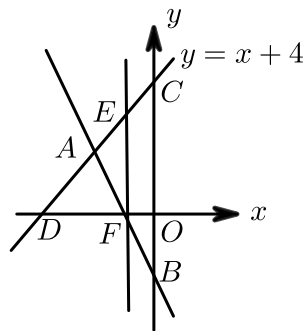
③当 OB 为菱形的边时, 点 P' 与 D 重合, P, Q 关于 y 轴对称, $Q'(-2, 2)$,

综上所述, 满足条件的 Q 的坐标为 $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 或 $(-2, 2)$ 或 $(4, 4)$.

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

练习3

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 D, C , 直线 AB 与 y 轴交于点 $B(0, -2)$, 与直线 CD 交于点 $A(m, 2)$.



(1) 求直线 AB 的解析式.

(2) 设 P 是射线 CD 上一点, 在平面内是否存在点 Q , 使以 B, C, P, Q 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = -2x - 2$.

(2) $(3, 1)$, $(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2} - 2)$ 或 $(-6, 4)$.

【解析】(1) $\because$ 点 $A(m, 2)$ 在直线 $y = x + 4$ 上,

$$\therefore m + 4 = 2 \text{ 解得 } m = -2,$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2, 2)$,

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 2 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = -2x - 2$.

(2) ① 当 BC 为对角线时, 点 P, Q 都在 BC 的垂直平分线上, 且点 P 和点 Q 关于 BC 对称,

$$\therefore B(0, -2), C(0, 4),$$

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 1,

$$\therefore P(-3, 1), Q(3, 1);$$

② 当 BC 为边时, $P(t, t + 4)$,

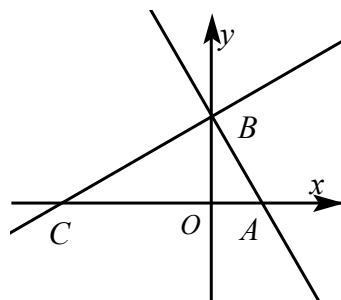
$$Q(t, t + 10) \text{ 或 } (t, t - 2), CP = CB \text{ 时, } P(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2} + 4),$$

$$Q(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2} - 2), BC = BP \text{ 时, } P(-6, -2), Q(-6, 4),$$

综上, 点 Q 的坐标为 $(3, 1), (-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2} - 2)$ 或 $(-6, 4)$.

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

8. 如图, 平面直角坐标系中, 直线 l 分别交 x 轴、 y 轴的正半轴于 A, B 两点, 且 $OA = 1, OB = \sqrt{3}$, 点 C 在 x 轴负半轴上, 且 $AB : AC = 1 : 2$.



(1) 点 C 的坐标为 _____.

(2) 若点 M 从 C 点出发, 以每秒 1 个单位的速度沿射线 CB 运动, 连接 AM , 设 $\triangle ABM$ 的面积为 S , 点 M 的运动时间为 t , 写出 S 关于 t 的函数关系式, 并写出自变量的取值范围.

(3) 点 P 是 y 轴上的点, 在坐标平面内是否存在点 Q , 使以 A, B, P, Q 为顶点的四边形是菱形若存在, 请求出 Q 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $(-3, 0)$

$$(2) S = \begin{cases} 2\sqrt{3} - t, & 0 \leq t < 2\sqrt{3} \\ t - 2\sqrt{3}, & t > 2\sqrt{3} \end{cases}.$$

(3) 存在点 Q , 使 A, B, P, Q 为顶点的四边形是菱形, $Q_1(1, 2), Q_2(1, -2), Q_3(-1, 0), Q_4\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

【解析】(1) $(-3, 0)$.

$$(2) \because OA = 1, OB = \sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 2.$$

$$\because AB : AC = 1 : 2,$$

$$\therefore AC = 4.$$

$$\therefore OC = 3.$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ.$$

$$\textcircled{1} 0 \leq t < 2\sqrt{3} \text{ 时,}$$

$$BM = 2\sqrt{3} - t,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM = \frac{1}{2} \times 2 \times (2\sqrt{3} - t) = 2\sqrt{3} - t;$$

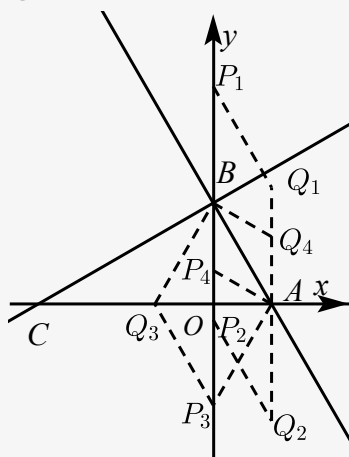
$$\textcircled{2} t > 2\sqrt{3} \text{ 时,}$$

$$BM = t - 2\sqrt{3},$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM = \frac{1}{2} \times 2 \times (t - 2\sqrt{3}) = t - 2\sqrt{3}.$$

$$\text{综上所述, } S = \begin{cases} 2\sqrt{3} - t, & 0 \leq t < 2\sqrt{3} \\ t - 2\sqrt{3}, & t > 2\sqrt{3} \end{cases}$$

(3) ① AB 为边时, 如图所示, $Q_1(1, 2), Q_2(1, -2), Q_3(-1, 0)$.



$$\textcircled{2} AB \text{ 为对角线时, 设 } BP_4 = AP_4 = x, \text{ 则 } OP_4 = \sqrt{3} - x,$$

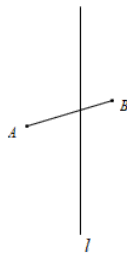
$$\text{在 Rt}\triangle OAP_4 \text{ 中, } 1^2 + (\sqrt{3} - x)^2 = x^2, \text{ 解得 } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, Q_4\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

综上，存在点 Q ，使 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形， $Q_1(1, 2)$ ， $Q_2(1, -2)$ ， $Q_3(-1, 0)$ ， $Q_4\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 。

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

与矩形存在性综合

有一个角是直角的平行四边形是矩形。因此，矩形存在性问题可转化为直角三角形存在性加平行四边形存在性问题。如点 C 是直线 l 上一点，在平面内找一点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为矩形。

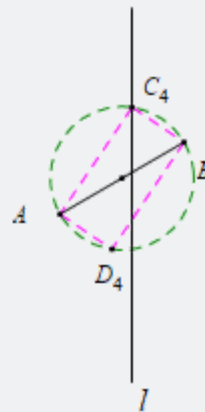
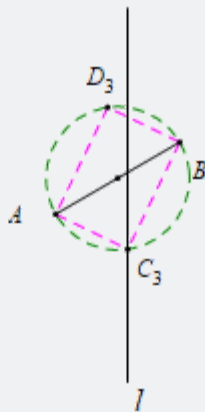
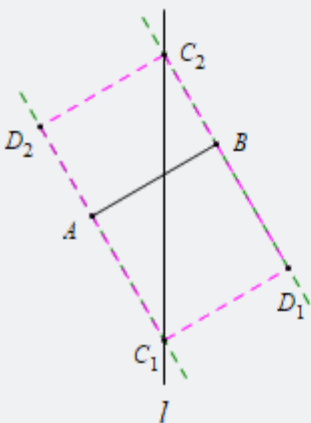


第一步，由“两线一圆”，先在直线 l 上找到点 C 使得 $\triangle ABC$ 为直角三角形，这样，就相当于找到了矩形的一半，满足情况的点 C 有 _____ 个；

第二步，由“平移法”或“中点法”找到点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是矩形。

在具体的求解过程中，点 C 坐标可以由直角三角形存在性问题的“代数法”或“几何法”求得；点 D 坐标继而可以由平行四边形存在性问题的“平移坐标公式法”或“中点坐标公式法”求得。

【教法备注】



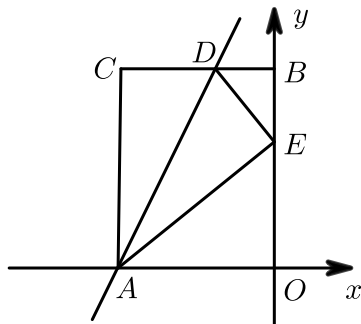
第一步，由“两线一圆”，先在直线 l 上找到点 C 使得 $\triangle ABC$ 为直角三角形，这样，就相当于找到了矩形的一半，满足情况的点 C 有4个；

第二步，由“平移法”或“中点法”找到点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是矩形。

在具体的求解过程中，点 C 坐标可以由直角三角形存在性问题的“代数法”或“几何法”求得；点 D 坐标继而可以由平行四边形存在性问题的“平移坐标公式法”或“中点坐标公式法”求得。

例题4

9. 如图，矩形 $AOBC$ 中， $A(-8,0)$ ， $B(0,10)$ ， D 为边 BC 上一点，现沿直线 AD 将矩形折叠，使点 C 与 y 轴上的点 E 重合。



- (1) 求直线 AD 的解析式。
 (2) 若点 P 在 y 轴上，平面内是否存在点 Q ，使以 A, D, P, Q 为顶点的四边形是以 AD 为边的矩形？若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = 2x + 16$ 。

(2) 存在， $Q\left(-5, -\frac{3}{2}\right)$ ， $Q(5, 6)$ 。

【解析】 (1) 直线 AD 解析式为 $y = 2x + 16$ 。

(2) $D(-3, 10)$ ，显然 $\angle PDA = 90^\circ$ 或 $\angle PAD = 90^\circ$ ，

设 $P(0, t)$ ， $AD = 5\sqrt{5}$ ， $PA = \sqrt{8^2 + t^2}$ ， $PD = \sqrt{3^2 + (t - 10)^2}$ ，

当 $\angle PDA = 90^\circ$ 时， $PD^2 + AD^2 = PA^2$ ，

解得 $t = \frac{17}{2}$ ，此时， $P\left(0, \frac{17}{2}\right)$ ， $Q\left(-5, -\frac{3}{2}\right)$ ；

当 $\angle PAD = 90^\circ$ 时， $PA^2 + AD^2 = PD^2$ ，

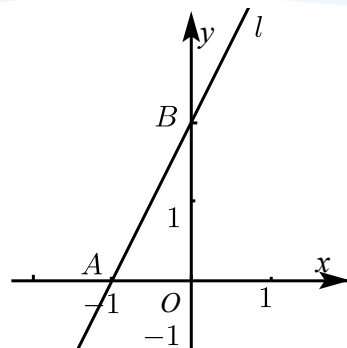
解得 $t = -4$ ，此时， $P(0, -4)$ ， $Q(5, 6)$ 。

综上可知存在满足条件的点 Q ，其坐标为 $\left(-5, -\frac{3}{2}\right)$ ， $(5, 6)$ 。

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

练习4

10. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 与直线 $y = 2x$ 平行，且直线 l 与 x 、 y 轴分别交于点 $A(-1, 0)$ 、点 B 、点 $C(1, a)$ 在直线 l 上。



(1) 求直线 l 的表达式以及点 C 的坐标 .

(2) 点 P 在 y 轴正半轴上, 点 Q 是坐标平面内一点, 如果四边形 $PAQC$ 为矩形, 求点 P 、 Q 的坐标 .

【答案】 (1) $y = 2x + 2$; $C(1, 4)$.

(2) $P(0, 2 + \sqrt{5})$ 、 $Q(0, 2 - \sqrt{5})$.

【解析】 (1) 设直线为 $y = kx + b$,

$\because$ 直线与 $y = 2x$ 平行 ,

$\therefore k = 2$,

点 $(-1, 0)$ 代入直线得 : $b = 2$,

$\therefore l : y = 2x + 2$.

点 $C(1, a)$ 代入直线得 : $a = 2 \times 1 + 2$,

$a = 4$,

$\therefore C(1, 4)$.

(2) $B(0, 2)$,

若四边 $PAQC$ 为矩形 , 则 $PC \perp PA$,

$\therefore \triangle PAC$ 为直角三角形 ,

可知 B 为 AC 中点 ,

$\therefore PB = \frac{1}{2}AC = \sqrt{5}$,

设 $P(0, y)$,

$(y - 2)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{5}$,

$\because y > 0$,

$\therefore y = 2 + \sqrt{5}$,

$\therefore P(0, 2 + \sqrt{5})$,

同理 , $\triangle QAC$ 为直角三角形 .

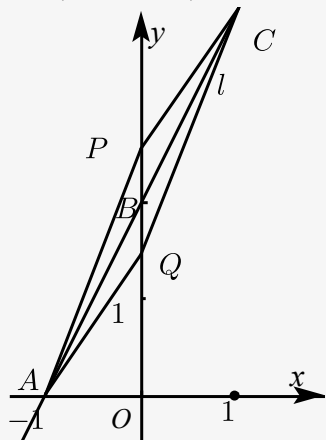
在 $\triangle BPC$ 与 $\triangle BQA$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle PBC = \angle QBA \\ BC = BA \\ \angle PCB = \angle QAB = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BPC \cong \triangle BQA,$$

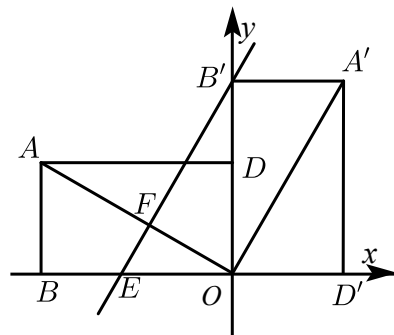
$$\therefore BO = \sqrt{5}, Q \text{ 点在 } y \text{ 轴上},$$

$$\therefore Q(0, 2 - \sqrt{5}).$$



【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

11. 如图，矩形 $ABCD$ 的顶点 C 与坐标轴原点 O 重合， OB 、 OD 边分别放在 x 轴， y 轴上；其中， $AB = 2$ ， $\angle AOB = 30^\circ$ ；将矩形 $ABCD$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得矩形 $A'B'OD'$ ，连接 AO 、 $A'O$ ；直线 $B'E \parallel A'O$ 交 x 轴于点 E ，交 AO 于点 F 。



- (1) 填空：矩形 $ABCD$ 的面积为 _____，直线 EB' 的解析式为 _____。
- (2) 在直线 EB' 上有动点 M ，在坐标平面内是否存在动点 N ，使以 M 、 N 、 O 、 A' 为顶点的四边形为矩形？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $4\sqrt{3}$ ； $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

(2) 存在。 $N\left(\frac{1}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ 、 $N\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、 $N(2, 0)$ 或 $(3, \sqrt{3})$ 。理由见解析。

【解析】(1) $\because AB = 2$ ， $\angle AOB = 30^\circ$ ，

$$\therefore BO = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

$$\therefore k_{A'O} = \sqrt{3}, B'(0, 2\sqrt{3}).$$

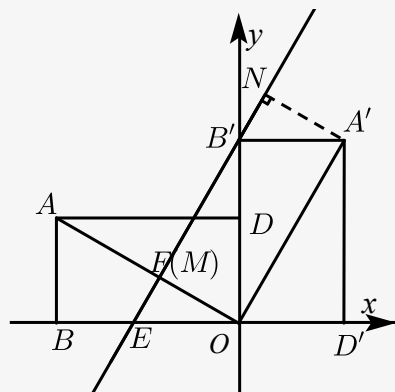
$$\therefore B'E: y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}.$$

(2) $\because A'O \perp AO$ 且 $A'O \parallel B'E$ 则 $B'E \perp AO$,

$$\text{联立} \begin{cases} AO: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ B'E: y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

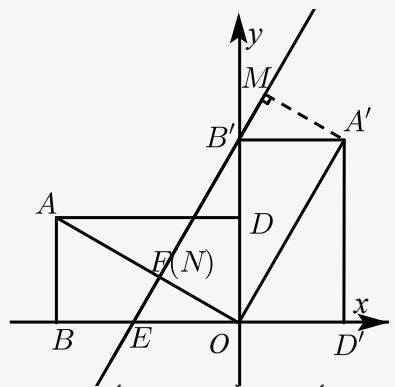
$$\therefore F\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

①当 $A'O$ 为矩形的边时, 若 M 在 F 处, 则过 A' 作 $B'E$ 的垂线, 垂足为 N ,



$$\text{此时 } N\left(\frac{1}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right).$$

②当 $A'O$ 为矩形的边时, 若 N 在 F 处, 则过 A' 作 $B'E$ 的垂线, 垂足为 M ,



$$\text{此时 } M\left(\frac{1}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right), N\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

③当 $A'O$ 为矩形的对角线时, 则找到 $B'E$ 上一点 M 使 $MA' \perp MO$ 即可.

$$\text{设 } M(a, \sqrt{3}a + 2\sqrt{3}),$$

$$\text{则 } MA'^2 + MO^2 = A'O^2 \text{ 即}$$

$$(a-2)^2 + (\sqrt{3}a + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 + a^2 + (\sqrt{3}a + 2\sqrt{3})^2 = 16,$$

$$\text{解得: } a = 0 \text{ 或 } -1,$$

$$\text{则 } M(0, 2\sqrt{3}) \text{ 或 } (-1, \sqrt{3}).$$

又 $A'O$ 的中点 $\left(1, \sqrt{3}\right)$ 与 MN 中点相同, $N(2, 0)$ 或 $(3, \sqrt{3})$.

综上: $N\left(\frac{1}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ 、 $N\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、 $N(2, 0)$ 或 $(3, \sqrt{3})$.

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形